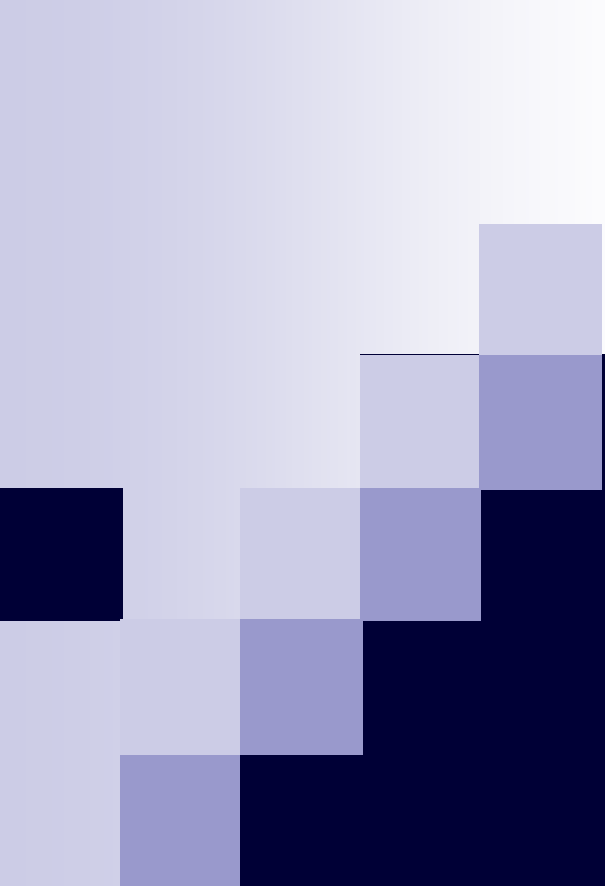
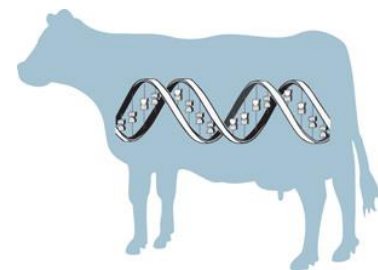




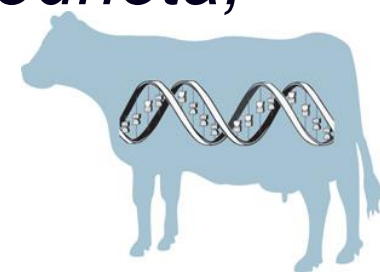
BLUP

Zdeňka Veselá
vesela.zdenka@vuzv.cz



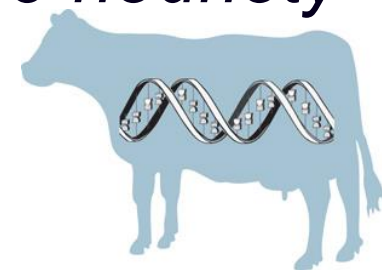
BLUP

- *V praxi předpověď plemenné hodnoty pomocí BLUP*
- *Best Linear Unbiased Prediction*
- *Systém rovnic lineárních modelů se smíšenými efekty*
 - *Fixní efekty – např. věk matky, pohlaví, plemeno, rok*
 - *Náhodné efekty – např. plemenná hodnota, maternální efekt, trvalé prostředí*



BLUP

- *Modifikované rovnice zobecněných nejmenších čtverců*
- *Momentálně nejčastější a nejrozšířenější metoda předpovědi PH*
- *Doporučená literatura:*
 - *MRODE R.A.: Linear models for the prediction for animal breeding values*
 - *JAKUBEC V. a kol.: Odhad plemenné hodnoty hospodářských zvířat*

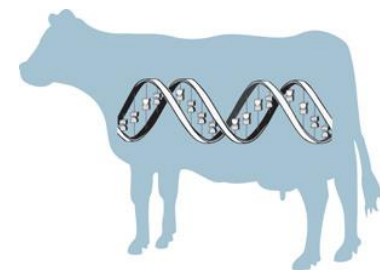


BLUP

■ *Lineární model se smíšenými efekty*

$$y = Xb + Za + e$$

- y – $n \times 1$ vektor pozorování, n = počet pozorování
- b – $p \times 1$ vektor fixních efektů, p = počet úrovní fixních efektů
- a – $q \times 1$ vektor náhodných efektů, q = počet úrovní náhodných efektů
- e – $n \times 1$ vektor náhodných residuálních efektů
- X – incidenční (strukturní, designová) matice dimenze $n \times p$
- Z – incidenční matice dimenze $n \times q$



BLUP

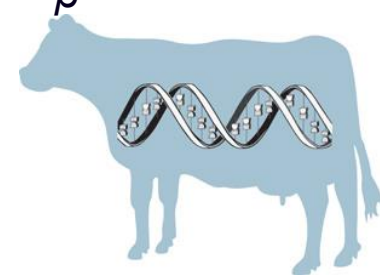
- *Lineární model se smíšenými efekty*

$$y = Xb + Za + e$$

- *Lze znázornit i skalárním zápisem*

$$y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + e_{ijk}$$

- y_{ijk} – užitkovost jedince
- μ – průměr populace
- a_i - fixní efekt i
- β_j – náhodný efekt j s průměrem 0 a variancí σ^2_β
- e_{eik} – náhodný chybový efekt (reziduum)

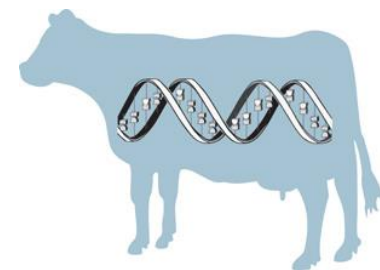


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

Transponované matice

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

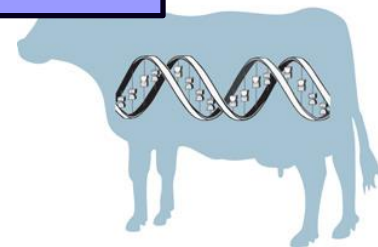


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

Užitkovost

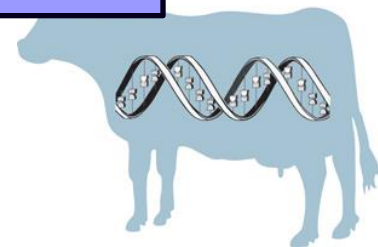


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

Incidenční matice fixních efektů

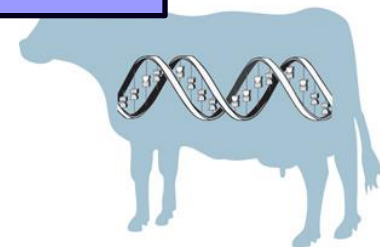


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

Incidenční matice náhodných efektů

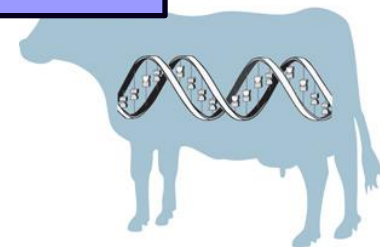


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

Odhadované fixní efekty

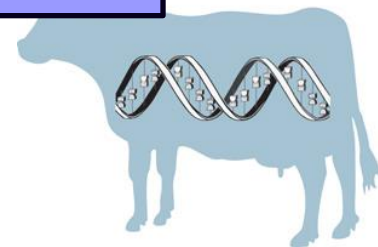


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

Předpovídané náhodné efekty

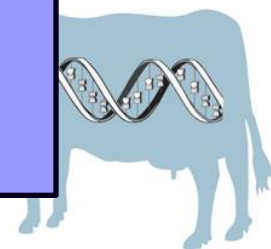


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

Rozptylová matice reziduálních efektů
Zpravidla skalární matice $\sigma_e^2 I$
(rezidua nejsou korelovaná a mají konstantní varianci)
Obě strany rovnice lze vynásobit R

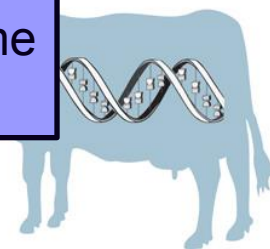


BLUP

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

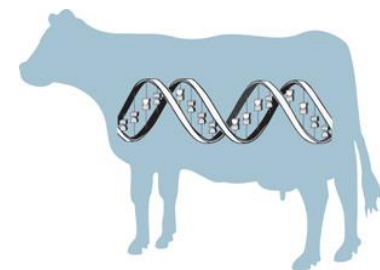
$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + G^{-1}\sigma_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

Rozptylová matice náhodných efektů
Různá struktura podle toho, jaké náhodné efekty předpovídáme



BLUP – otcovský model

- *Předpovídáme PH pro plemeníky (otce) dle užitečností jejich potomků*
 - *Náhodný efekt v modelu je otec*
- *Předpokládáme-li, že plemeníci mezi sebou nejsou příbuzní a mají stejnou varianci σ^2_s*
- *Rozptylová matice náhodného efektu (otec) bude $\mathbf{G} = \sigma^2_s \mathbf{I}$*
- $\mathbf{G}^{-1} = (1/\sigma^2_s) \mathbf{I}$



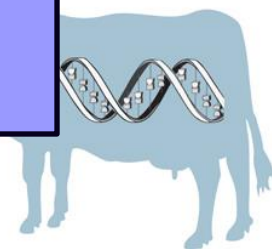
BLUP – otcovský model

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + G^{-1}\sigma_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

$$G^{-1}\sigma_e^2 = I (\sigma_e^2 / \sigma_s^2) = I \alpha$$

$$\alpha = \sigma_e^2 / \sigma_s^2 = (4 - h^2) / h^2$$



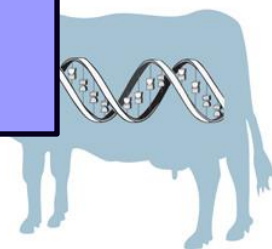
BLUP – otcovský model

- *Soustava normálních rovnic (Henderson)*
Mixed Model Equation (MME)

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

$$G^{-1}\sigma_e^2 = I (\sigma_e^2 / \sigma_s^2) = I \alpha$$

$$\alpha = \sigma_e^2 / \sigma_s^2 = (4 - h^2) / h^2$$



BLUP – otcovský model

■ *PŘÍKLAD 1*

BLUP – otcovský model

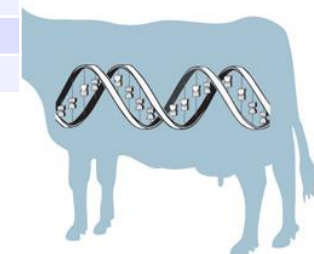
Máme k dispozici produkci mléka 10 dcer 5 býků za 100 denní zkrácenou první laktaci. Dcery se nacházejí ve 3 stádech (viz tab). Cílem cvičení je odhadnout fixní efekt stáda a předpovědět plemennou hodnotu otců.

Otcovské efekty představují náhodný výběr z množiny otců se střední hodnotou rovnající se 0 a s variancí 24500 kg. Každá užitkovost obsahuje vedle stádových a otcovských efektů jeden náhodný reziduální efekt se střední hodnotou 0 a variancí 465500 kg.

Předpokládáme, že otcovské efekty jsou na sobě nezávislé, tj. otcové nejsou mezi sebou příbuzní.

Dále vypočítejte standardní chybu předpovědi, spolehlivost a přesnost předpovědi plemenných hodnot býků.

Číslo dcery	Stádo	Otec	Produkce mléka v kg
1	1	3	4200
2	1	5	2700
3	2	1	3200
4	2	2	3100
5	2	5	3000
6	3	2	2900
7	3	3	2800
8	3	4	3800
9	3	4	4000
10	3	5	3500



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Rozptylová matice náhodných efektů

- $\sigma^2_s = 24500$ kg
- $\sigma^2_e = 465500$ kg
- $\alpha = \sigma^2_e / \sigma^2_s = 465500 / 24500 = 19$

$$I\alpha = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$$

```
vars = 24500;  
vare = 465500;  
alfa = vare/vars; print alfa;  
I = I(5); print I;  
Ialfa = I*alfa; print Ialfa;
```

```
ALFA  
19  
  
I  
1 0 0 0 0  
0 1 0 0 0  
0 0 1 0 0  
0 0 0 1 0  
0 0 0 0 1  
  
IALFA  
19 0 0 0 0  
0 19 0 0 0  
0 0 19 0 0  
0 0 0 19 0  
0 0 0 0 19
```

BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Incidenční matice pevného efektu stádo

Dcera 1 v 1. stádě →

Dcera 2 v 1. stádě →

Dcera 3 v 2. stádě →

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
/*... PŘÍKLAD 4 ...*/  
proc iml;  
/*... Designová matice pro fixní efekt stádo ...*/  
X = {1 0 0,  
      1 0 0,  
      0 1 0,  
      0 1 0,  
      0 1 0,  
      0 0 1,  
      0 0 1,  
      0 0 1,  
      0 0 1,  
      0 0 1};
```

BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

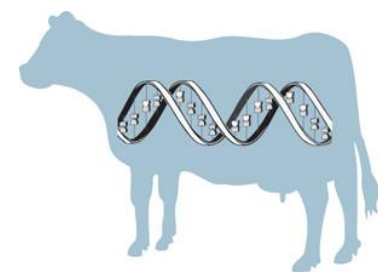
■ Incidenční matice náhodného efektu otec

Dcera 1 po otci 3 →

Dcera 2 po otci 5 →

Dcera 3 po otci 0 →

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Incidenční matice náhodného efektu otec

Dcera 1 po otci 3

Dcera 2 po otci 5

Dcera 3 po otci 0

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

/*... Designová matice pro náhodný efekt - otec ...*/

```
Z = {0 0 1 0 0,  
      0 0 0 0 1,  
      1 0 0 0 0,  
      0 1 0 0 0,  
      0 0 0 0 1,  
      0 1 0 0 0,  
      0 0 1 0 0,  
      0 0 0 1 0,  
      0 0 0 1 0,  
      0 0 0 0 1};
```

BLUP – otcovský model

■ PŘÍKLAD 1

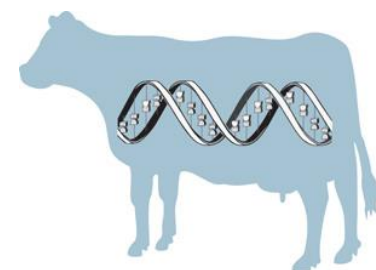
$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

```
XX = X'*X; print XX;
```

XX

2	0	0
0	3	0
0	0	5



BLUP – otcovský model

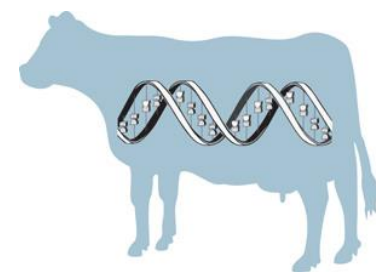
$$\begin{bmatrix} \textcircled{X'X} & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

V 1. stádě 2 jedinci
V 2. stádě 3 jedinci
Ve 3. stádě 5 jedinců

Žádný jedinec není zároveň ve 2 stádech



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

Otec 1 má ve stádě 1 0 dcer

Otec 3 má ve stádě 1 1 dceru

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
XZ = X'*Z; print XZ;
```

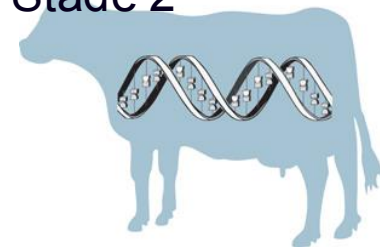
XZ				
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1
0	1	1	2	1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Otec 4 má 2 dcery ve stádě 3

Ve stádě 2 je:
1 dcera po otci 1
1 dcera po otci 2
1 dcera po otci 5
Otec 4 a 5 nemají
Žádnou dceru ve
Stádě 2



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & \textcircled{Z'Z + I\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

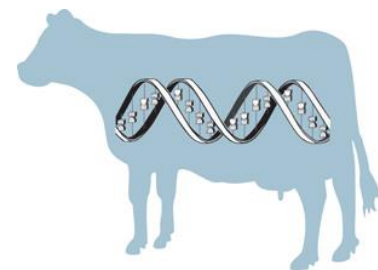
$$Z'Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Otec 1 má 1 dceru
Otec 2 má 2 dcery

```
zz = Z'*Z; print zz;
```

zz

1	0	0	0	0
0	2	0	0	0
0	0	2	0	0
0	0	0	2	0
0	0	0	0	3



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4200 \\ 2700 \\ 3200 \\ 3100 \\ 3000 \\ 2900 \\ 2800 \\ 3800 \\ 4000 \\ 3500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6900 \\ 9300 \\ 17000 \end{bmatrix}$$

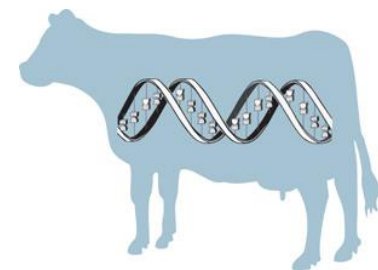
```
Xy = X'*y; print Xy;
```

XY

6900
9300
17000

Součet užítkovosti plemenic
ve stádě 1 je:

$$4200 + 2700 = 6900$$



BLUP – otcovský model

■ PŘÍKLAD 1

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

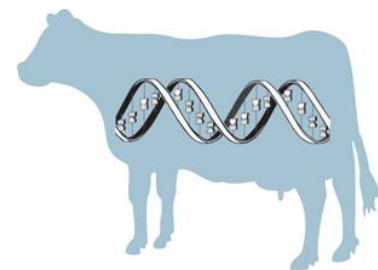
$$Z'y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4200 \\ 2700 \\ 3200 \\ 3100 \\ 3000 \\ 2900 \\ 2800 \\ 3800 \\ 4000 \\ 3500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3200 \\ 6000 \\ 7000 \\ 7800 \\ 9200 \end{bmatrix}$$

```
Zy = Z'*y; print Zy;
```

ZY

3200
6000
7000
7800
9200

Součet užitekosti dcer
otce 5 je:
 $2700 + 3000 + 3500 = 9200$



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & \textcircled{Z'Z + I\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

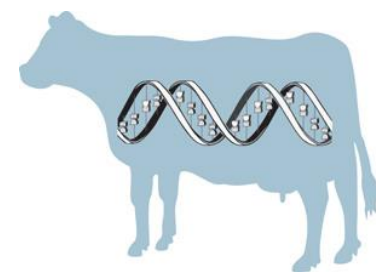
■ PŘÍKLAD 1

$$Z'Z + I\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

```
ZZIalfa = ZZ + Ialfa; print ZZIalfa;
```

ZZIALFA

20	0	0	0	0
0	21	0	0	0
0	0	21	0	0
0	0	0	21	0
0	0	0	0	22



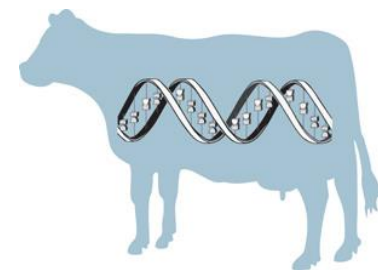
BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Rovnice smíšeného modelu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6900 \\ 9300 \\ 17000 \\ 3200 \\ 6000 \\ 7000 \\ 7800 \\ 9200 \end{bmatrix}$$



BLUP – otcovský model

■ PŘÍKLAD 1

■ Rovnice smíšeného modelu:

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

```
LS = (XX||XZ)/(Z||ZZIalpha); print LS;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LS

2	0	0	0	0	1	0	1
0	3	0	1	1	0	0	1
0	0	5	0	1	1	2	1
0	1	0	20	0	0	0	0
0	1	1	0	21	0	0	0
1	0	1	0	0	21	0	0
0	0	2	0	0	0	21	0
1	1	1	0	0	0	0	22

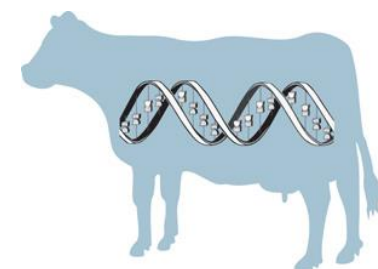
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6900 \\ 9300 \\ 17000 \\ 3200 \\ 6000 \\ 7000 \\ 7800 \\ 9200 \end{bmatrix}$$

```
RS = Xy/Zy; print RS;
```

RS

6900
9300
17000
3200
6000
7000
7800
9200



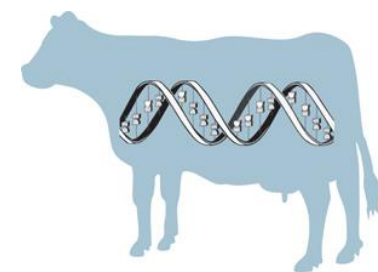
BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Rovnice smíšeného modelu:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6900 \\ 9300 \\ 17000 \\ 3200 \\ 6000 \\ 7000 \\ 7800 \\ 9200 \end{bmatrix}$$



BLUP – otcovský model

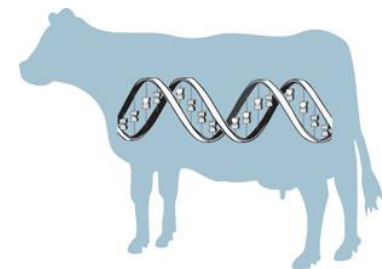
$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

- **PŘÍKLAD 1**
- *Inverze matice LS získáme matici C*

```
C = inv(LS); print C;
```

C

0.5251309	0.0087017	0.010642	-0.000435	-0.000921	-0.025513	-0.001014	-0.024749
0.0087017	0.3503982	0.0071587	-0.01752	-0.017027	-0.000755	-0.000682	-0.016648
0.010642	0.0071587	0.2145412	-0.000358	-0.010557	-0.010723	-0.020432	-0.010561
-0.000435	-0.01752	-0.000358	0.050876	0.0008513	0.0000378	0.0000341	0.0008324
-0.000921	-0.017027	-0.010557	0.0008513	0.0489326	0.0005466	0.0010054	0.0012957
-0.025513	-0.000755	-0.010723	0.0000378	0.0005466	0.0493446	0.0010212	0.0016814
-0.001014	-0.000682	-0.020432	0.0000341	0.0010054	0.0010212	0.049565	0.0010058
-0.024749	-0.016648	-0.010561	0.0008324	0.0012957	0.0016814	0.0010058	0.0478163



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

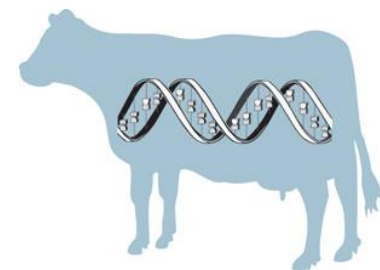
- **PŘÍKLAD 1**
- *Vektor s odhadnutými fixními efekty a předpovězenými náhodnými efekty*

```
T = C*RS; print T;
```

T

```
3464.1382
3118.4523
3391.1226
4.0773857
-24.26547
6.8923433
48.464517
-35.16878
```

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \\ \hat{s}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3464,14 \\ 3118,45 \\ 3391,12 \\ 4,08 \\ -24,26 \\ 6,89 \\ 48,46 \\ -35,17 \end{bmatrix}$$



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

- **PŘÍKLAD 1**
- *Diagonální prvky inverze rovnic smíšeného modelu*

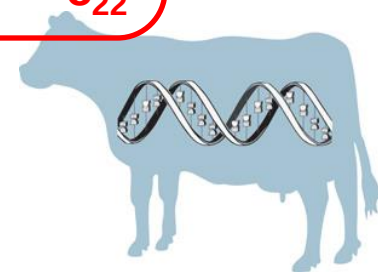
C₁₁

C							
0.5251309	0.0087017	0.010642	-0.000435	-0.000921	-0.025513	-0.001014	-0.024749
0.0087017	0.3503982	0.0071587	-0.01752	-0.017027	-0.000755	-0.000682	-0.016648
0.010642	0.0071587	0.2145412	-0.000358	-0.010557	-0.010723	-0.020432	-0.010561
-0.000435	-0.01752	-0.000358	0.050876	0.0008513	0.0000378	0.0000341	0.0008324
-0.000921	-0.017027	-0.010557	0.0008513	0.0489326	0.0005466	0.0010054	0.0012957
-0.025513	-0.000755	-0.010723	0.0000378	0.0005466	0.0493446	0.0010212	0.0016814
-0.001014	-0.000682	-0.020432	0.0000341	0.0010054	0.0010212	0.049565	0.0010058
-0.024749	-0.016648	-0.010561	0.0008324	0.0012957	0.0016814	0.0010058	0.0478163

C₁₂

C₂₁

C₂₂



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

- **PŘÍKLAD 1**
- *Diagonální prvky inverze rovnic smíšeného modelu*

C₁₁

```
0.5251309 0.0087017 0.010642 -0.000435 -0.000921 -0.025513 -0.001014 -0.024749
0.0087017 0.3503982 0.0071587 -0.01752 -0.017027 -0.000755 -0.000682 -0.016648
0.010642 0.0071587 0.2145412 -0.000358 -0.010557 -0.010723 -0.020432 -0.010561
-0.000435 -0.01752 -0.000358 0.050876 0.0008513 0.0000378 0.0000341 0.0008324
-0.000921 -0.017027 -0.010557 0.0008513 0.0489326 0.0005466 0.0010054 0.0012957
-0.025513 -0.000755 -0.010723 0.0000378 0.0005466 0.0493446 0.0010212 0.0016814
-0.001014 -0.000682 -0.020432 0.0000341 0.0010054 0.0010212 0.049565 0.0010058
-0.024749 -0.016648 -0.010561 0.0008324 0.0012957 0.0016814 0.0010058 0.0478163
```

C₁₂

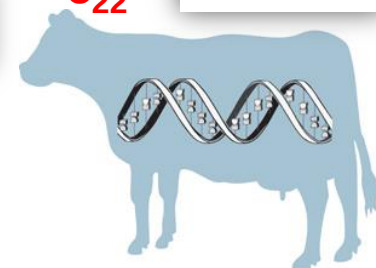
C_{DIAG}

```
0.050876
0.0489326
0.0493446
0.049565
0.0478163
```

C₂₁

```
Csub = C[4:8,4:8];
Cdiag = vecdiag(Csub); print Cdiag; run;
```

C₂₂



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ *PŘÍKLAD 1*

■ *Predikovaná chybová variance (PEV)*

$$PEV = d_i \sigma_e^2$$

■ *Standardní chyba předpovědi (SEP)*

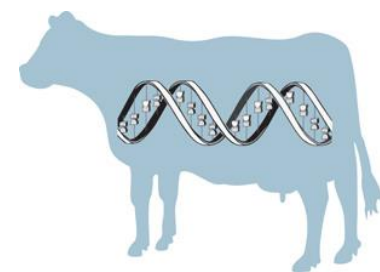
$$SEP = \sqrt{d_i \sigma_e^2}$$

■ *Spolehlivost předpovědi*

$$r^2 = 1 - d_i \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}$$

■ *Přesnost předpovědi*

$$r = \sqrt{r^2}$$



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Standardní chyba předpovědi (SEP)

$$SEP = \sqrt{d_i \sigma_e^2}$$

$$SEP = \sqrt{0,05876 \cdot 465500} = 153,89$$

$$SEP = \sqrt{0,04893 \cdot 465500} = 150,92$$

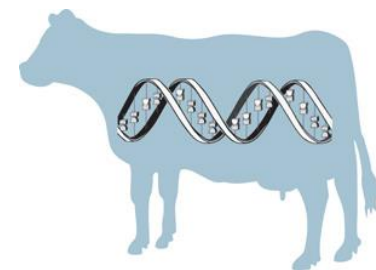
$$SEP = \sqrt{0,04934 \cdot 465500} = 151,56$$

$$SEP = \sqrt{0,04956 \cdot 465500} = 151,90$$

$$SEP = \sqrt{0,04781 \cdot 465500} = 149,19$$

```
/*... Standardní chyba predikce ...*/  
SEP = sqrt(Cdiag*vare); print SEP;
```

SEP
153.89209
150.92417
151.55823
151.89637
149.19274



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ PŘÍKLAD 1

■ Spolehlivost předpovědi

$$r^2 = 1 - d_i \cdot \alpha$$

$$r = 1 - 0,050876 \cdot 19 = 0,033$$

$$r = 1 - 0,048933 \cdot 19 = 0,070$$

$$r = 1 - 0,049345 \cdot 19 = 0,062$$

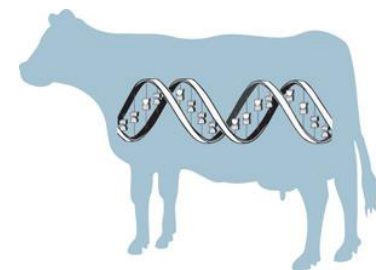
$$r = 1 - 0,04956 \cdot 19 = 0,058$$

$$r = 1 - 0,047816 \cdot 19 = 0,091$$

```
/*... Spolehlivost ...*/  
r2 = 1 - Cdiag*vare/vars; print r2;
```

R2

```
0.0333561  
0.0702815  
0.0624531  
0.058265  
0.0914909
```



BLUP – otcovský model

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + I\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

■ *PŘÍKLAD 1*

■ *Přesnost předpovědi*

$$r = \sqrt{r^2}$$

$$r = \sqrt{0,033} = 0,183$$

$$r = \sqrt{0,070} = 0,265$$

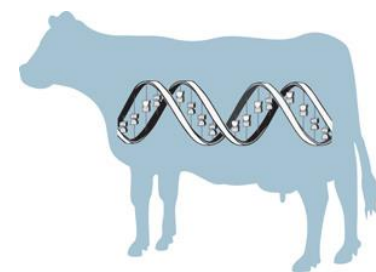
$$r = \sqrt{0,062} = 0,250$$

$$r = \sqrt{0,058} = 0,241$$

$$r = \sqrt{0,091} = 0,302$$

```
/*... Přesnost ...*/  
r = sqrt(r2); print r;
```

r
0.1826365
0.2651065
0.2499063
0.2413814
0.3024746



Příště: BLUP ANIMAL MODEL ...

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$