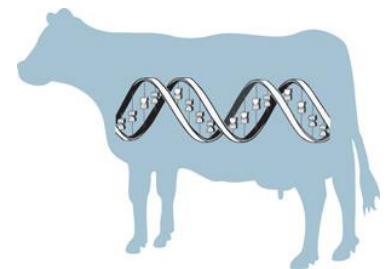


LINEÁRNÍ MODELÝ

Zdeňka Veselá
vesela.zdenka@vuzv.cz



Genetika kvantitativních vlastností

- *Jednotlivé geny nejsou zjistitelné ani měřitelné*
- *Efekty většího počtu genů poskytují variabilitu, kterou lze většinou definovat normálním rozdělením.*
- *Základem kvantitativní genetiky je mendelistická teorie dědičnosti, ale vlastní analýzy jsou založené na statistických metodách.*

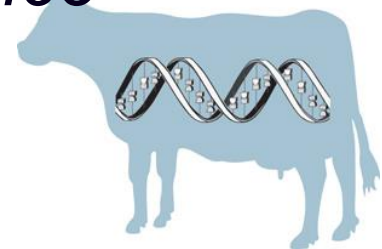


Analýza variance

- *Základní princip Fisher (1918)*
- *Členění variance (proměnlivosti) na její komponenty*
- *Tři hlavní funkce:*
 - ☐ *Odhad fixních efektů*
 - ☐ *Předpověď náhodných efektů*
 - ☐ *Testování hypotéz o příčinách variance*

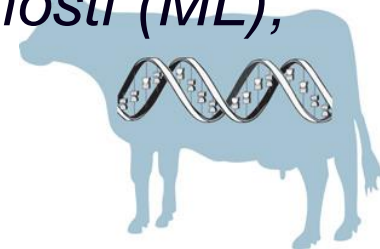
} Kvantitativní
genetika

} Analýza experimentů



Analýza variance

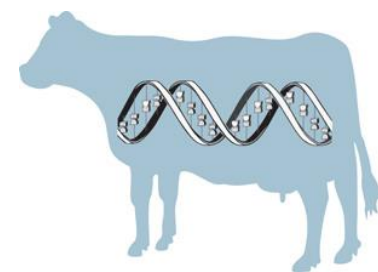
- *Různé metody podle struktury dat*
- *V genetice kvantitativních vlastností hospodářských zvířat pracujeme s nevybalancovanou strukturou dat*
 - *Matematicky složité*
 - *Vyžaduje řešení velkého počtu rovnic (statisíců i milionů), které mohou být přehledným způsobem znázorněny maticovým zápisem*
 - *Metoda nejmenších čtverců*
 - *Další metody: metoda maximální věrohodnosti (ML), Bayesovská analýza (Gibbsův výběr)*



Lineární modely

- *Modely využívané v kvantitativně genetických analýzách jsou ve většině případů lineární.*

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$



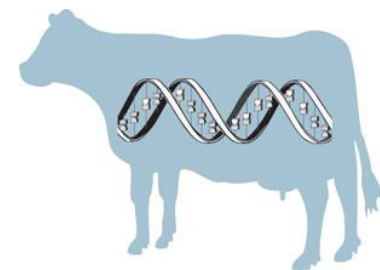
Lineární modely

- *Modely využívané v kvantitativně genetických analýzách jsou ve většině případů lineární.*

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$



Pozorovaná proměnná j-tého jedince v i-tém stádě



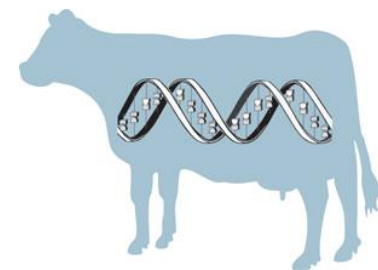
Lineární modely

- *Modely využívané v kvantitativně genetických analýzách jsou ve většině případů lineární.*

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$



Průměr populace



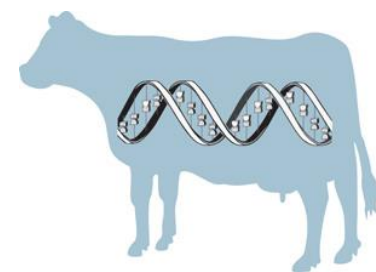
Lineární modely

- *Modely využívané v kvantitativně genetických analýzách jsou ve většině případů lineární.*

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$



Fixní efekt – např. úroveň stáda



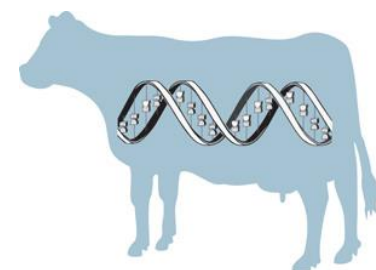
Lineární modely

- *Modely využívané v kvantitativně genetických analýzách jsou ve většině případů lineární.*

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}$$

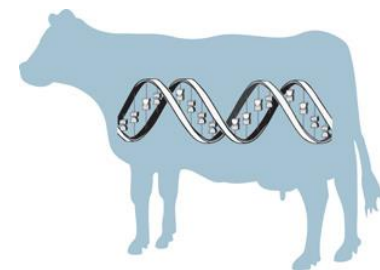


Náhodná reziduální chyba – specifická pro i-té stádo a j-tého jedince



Lineární modely

- *Regresní modely*
- *Modely s fixními efekty*
- *Modely s náhodnými efekty*
- *Modely se smíšenými efekty*
 - *Nejčastější případ při předpovědi PH*
 - *Zahrnují jak pevné, tak náhodné efekty*



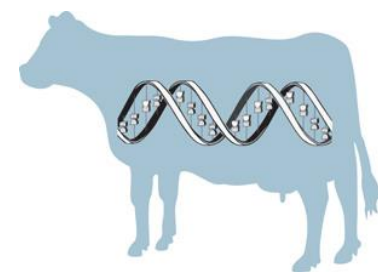
Maticový zápis lineárního modelu

■ *Model s fixními efekty*

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \quad \dots \text{skalární zápis}$$



$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad \dots \text{maticový zápis}$$



Maticový zápis lineárního modelu

■ *Model s fixními efekty*

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \quad \dots \text{skalární zápis}$$

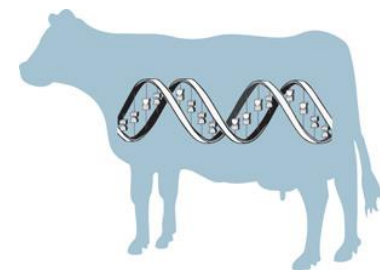


$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e}$$

... maticový zápis



y - Vektor pozorovaných hodnot (vektor dat)



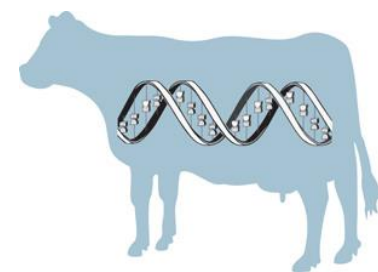
Maticový zápis lineárního modelu

■ *Model s fixními efekty*

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \quad \dots \text{skalární zápis}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad \dots \text{maticový zápis}$$

$\mathbf{X}$ – incidenční (strukturní, designová) matice



Maticový zápis lineárního modelu

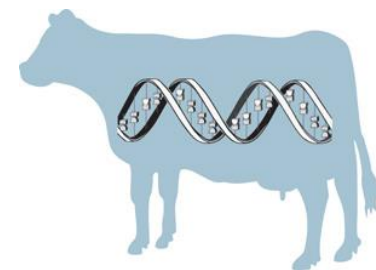
■ *Model s fixními efekty*

$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \quad \dots \text{skalární zápis}$$

$$y = Xb + e$$

... maticový zápis

b – vektor odhadovaných parametrů



Maticový zápis lineárního modelu

■ *Model s fixními efekty*

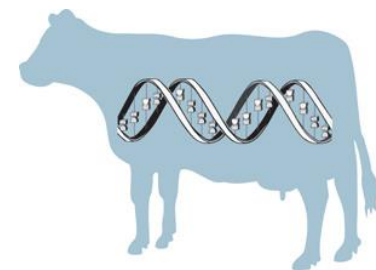
$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \quad \dots \text{skalární zápis}$$



$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad \dots \text{maticový zápis}$$

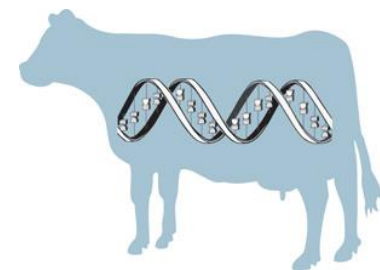


$\mathbf{e}$ – vektor náhodných reziduálních chyb
– normální rozdělení s průměrem 0 a variancí σ^2_e
– tj. $\mathbf{e} \sim N(0, \mathbf{I} \sigma^2_e)$



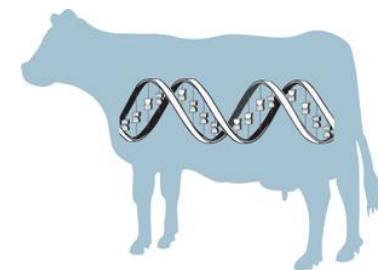
Příklad – vybalancovaná struktura dat

- *Máme 18 dojnic, u kterých analyzujeme roční produkci mléčných bílkovin. Dojnice do experimentu vybíráme tak, abychom měli vybalancovanou strukturu dat.*
- *Sledujeme 2 efekty:*
 - *Období otelení (zimní – a_1 / letní – a_2)*
 - *Věk při prvním otelení (20 – 27 měsíců – b_1 , 28 – 34 měsíců – b_2 , nad 35 měsíců – b_3)*



Příklad – vybalancovaná struktura dat

			Věk při prvním otelení (měsíce)			Průměry
			20 - 27	28 - 34	Nad 35	
			b ₁	b ₂	b ₃	
Období otelení	Letní	a ₁	144	143	145	ȳ _{1..} = 145,78
			160	136	151	
			150	135	148	
	Zimní	a ₂	115	109	103	ȳ _{2..} = 125,78
			126	163	145	
			105	118	148	
Průměry			ȳ _{.1.} = 133,33	ȳ _{.2.} = 134,00	ȳ _{.3.} = 140,00	ȳ _{...} = 135,78



Příklad – vybalancovaná struktura dat

- Odhad efektu období otelení

$$\hat{a}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$$

- Odhad efektu věk při prvním otelení

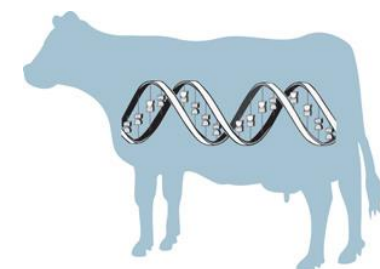
$$\hat{b}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

Věk

$$\bar{y}_{1..} = 145,78$$

$$\bar{y}_{2..} = 125,78$$

Období	$\bar{y}_{.1.} = 133,33$	$\bar{y}_{.2.} = 134,00$	$\bar{y}_{.3.} = 140,00$	$\bar{y}_{...} = 135,78$
--------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------



Příklad – vybalancovaná struktura dat

- Odhad efektu období otelení

$$\hat{a}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$$

- Odhad efektu věk při prvním otelení

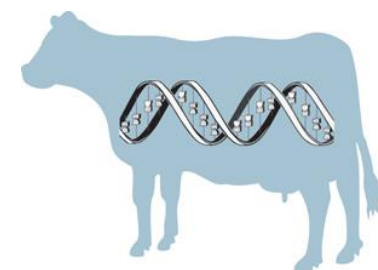
$$\hat{b}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

Věk

10

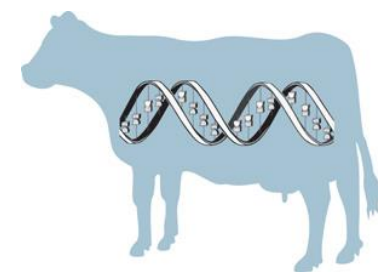
-10

Období	-2,45	-1,78	4,22	$\bar{y}_{...} = 135,78$
--------	-------	-------	------	--------------------------



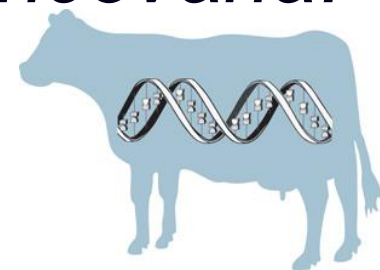
Příklad – nevybalancovaná struktura dat

			Věk při prvním otelení (měsíce)		
			20 - 27	28 - 34	Nad 35
			b ₁	b ₂	b ₃
Období otelení	Letní	a ₁	144	152	148
			152		
	Zimní	a ₂		105	108
				158	
				118	



Příklad – nevybalancovaná struktura dat

- *Běžná situace při populačně genetických analýzách a předpovědích plemenné hodnoty*
- *Vybalancovaný případ je speciálním případem nevybalancovaného, nikoliv naopak.*
- *Metodiku pro hodnocení vybalancovaných dat nelze použít na data nevybalancovaná.*



Příklad – nevybalancovaná struktura dat

$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \dots$ skalární zápis

$y = Xb + e \dots$ maticový zápis

			Věk při prvním otelení (měsíce)		
			20 - 27	28 - 34	Nad 35
			b ₁	b ₂	b ₃
Období otelení	Letní	a ₁	144	152	148
			152		
	Zimní	a ₂		105	108
				158	
				118	

$$y = Xb + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{231} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + a_1 + b_1 + e_{111} \\ \mu + a_1 + b_1 + e_{112} \\ \mu + a_1 + b_2 + e_{121} \\ \mu + a_1 + b_3 + e_{131} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{221} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{222} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{223} \\ \mu + a_2 + b_3 + e_{231} \end{bmatrix}$$

$$y = Xb + e$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 152 \\ 152 \\ 148 \\ 105 \\ 158 \\ 118 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{231} \end{bmatrix}$$

Příklad – nevybalancovaná struktura dat

$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \dots$ skalární zápis

$y = Xb + e \dots$ maticový zápis

			Věk při prvním otelení (měsíce)		
			20 - 27	28 - 34	Nad 35
			b ₁	b ₂	b ₃
Období otelení	Letní	a ₁	144	152	148
			152		
	Zimní	a ₂		105	108
				158	
				118	

y – vektor pozorovaných hodnot (dat)

$$y = Xb + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{231} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + a_1 + b_1 + e_{111} \\ \mu + a_1 + b_1 + e_{112} \\ \mu + a_1 + b_2 + e_{121} \\ \mu + a_1 + b_3 + e_{131} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{221} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{222} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{223} \\ \mu + a_2 + b_3 + e_{231} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{y} = X b + e$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 152 \\ 152 \\ 148 \\ 105 \\ 158 \\ 118 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{231} \end{bmatrix}$$

Příklad – nevybalancovaná struktura dat

$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \dots$ skalární zápis

$y = Xb + e$... maticový zápis

			Věk při prvním otelení (měsíce)		
			20 - 27	28 - 34	Nad 35
			b ₁	b ₂	b ₃
Období otelení	Letní	a ₁	144	152	148
			152		
	Zimní	a ₂		105	108
				158	
				118	

X - incidenční (strukturní, designová) matice

Uvádí, které fixní efekty jsou obsaženy v hodnotě y .

$$y = Xb + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{231} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + a_1 + b_1 + e_{111} \\ \mu + a_1 + b_1 + e_{112} \\ \mu + a_1 + b_2 + e_{121} \\ \mu + a_1 + b_3 + e_{131} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{221} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{222} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{223} \\ \mu + a_2 + b_3 + e_{231} \end{bmatrix}$$

$$y = X b + e$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 152 \\ 152 \\ 148 \\ 105 \\ 158 \\ 118 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{231} \end{bmatrix}$$

Příklad – nevybalancovaná struktura dat

$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \dots$ skalární zápis

$y = Xb + e \dots$ maticový zápis

			Věk při prvním otelení (měsíce)		
			20 - 27	28 - 34	Nad 35
			b ₁	b ₂	b ₃
Období otelení	Letní	a ₁	144	152	148
			152		
	Zimní	a ₂		105	108
				158	
				118	

b – vektor odhadovaných parametrů

$$y = Xb + e$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{231} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + a_1 + b_1 + e_{111} \\ \mu + a_1 + b_1 + e_{112} \\ \mu + a_1 + b_2 + e_{121} \\ \mu + a_1 + b_3 + e_{131} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{221} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{222} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{223} \\ \mu + a_2 + b_3 + e_{231} \end{bmatrix}$$

$$y = X \quad \textcircled{b} + e$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 152 \\ 152 \\ 148 \\ 105 \\ 158 \\ 118 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{231} \end{bmatrix}$$

Příklad – nevybalancovaná struktura dat

$y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + e_{ijk} \dots$ skalární zápis

$y = Xb + e \dots$ maticový zápis

			Věk při prvním otelení (měsíce)		
			20 - 27	28 - 34	Nad 35
			b ₁	b ₂	b ₃
Období otelení	Letní	a ₁	144	152	148
			152		
	Zimní	a ₂		105	108
				158	
				118	

e – vektor náhodných reziduálních efektů

$$y = Xb + e$$

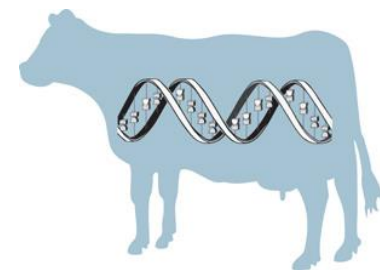
$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{231} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + a_1 + b_1 + e_{111} \\ \mu + a_1 + b_1 + e_{112} \\ \mu + a_1 + b_2 + e_{121} \\ \mu + a_1 + b_3 + e_{131} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{221} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{222} \\ \mu + a_2 + b_2 + e_{223} \\ \mu + a_2 + b_3 + e_{231} \end{bmatrix}$$

$$y = Xb + e$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 152 \\ 152 \\ 148 \\ 105 \\ 158 \\ 118 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{231} \end{bmatrix}$$

Příklad – nevybalancovaná struktura dat

- *Důležité je definovat a vytvořit designovou matici X*
 - *V praxi při velkém počtu pozorování může nabývat obřích rozměrů*
- *Pro úplné definování modelu je třeba zahrnout náhodné efekty pomocí rozptylové (variančně-kovarianční) matice*



Příklad – nevybalancovaná struktura dat

■ Rozptylová variančně-kovarianční matice pro náhodný efekt e_{ijk}

□ Víme, že $\sigma_e^2 = 30$

Předpokládáme, že kovariance mezi reziduálními efekty je 0

$$\begin{bmatrix} \sigma_{e1}^2 & cov_{e1e2} & cov_{e1e3} & \dots & cov_{e1e8} \\ cov_{e2e1} & \sigma_{e2}^2 & cov_{e2e3} & \dots & cov_{e2e8} \\ cov_{e3e1} & cov_{e3e2} & \sigma_{e3}^2 & \dots & cov_{e3e8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{e8e1} & cov_{e8e2} & cov_{e8e3} & \dots & \sigma_{e8}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 30 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 30 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} 30 = 30 I$$

Rozptylová matice je vždy symetrická.

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_y = \sigma_e^2 \mathbf{I}$$

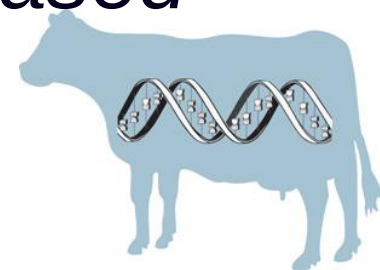
Pozorování y neobsahuje kromě e žádné jiné náhodné efekty

Symbolem $\mathbf{V}$ označujeme obecně variančně – kovarianční matici



Metoda nejmenších čtverců

- *Odhad efektů b*
- *Součet čtverců odchylek pozorování od odhadnutých středních hodnot podskupin buněk ($\mathbf{Xb}$) je minimální*
 - *Tj., že $(\mathbf{y} - \mathbf{XB})'(\mathbf{y} - \mathbf{XB})$ odpovídá minimu*
- *Odhady získané metodou nejmenších čtverců jsou nelepší lineární nevychýlené odhady (BLUE – Best Linear Unbiased Estimation)*



Metoda nejmenších čtverců

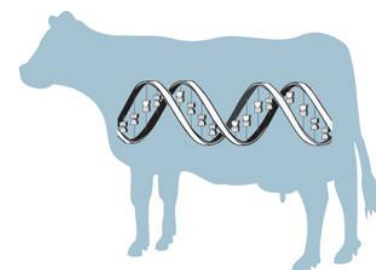
Zobecněné nejmenší čtverce
GLS – Generalized least squares

$$X'V^{-1}Xb = X'V^{-1}y$$

- V – rozptylová matice
 V našem případě $V = I \sigma^2$, tj. matice
neobsahuje žádné mimodiagonální prvky,
dochází ke zjednodušení rovnice:

$$X'Xb = X'y$$

BLUE – Best Linear Unbiased Estimation
OLS – Ordinary least square



Zobecněné nejmenší čtverce

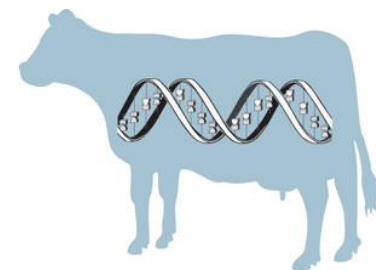
			Otec		
			Otec 1	Otec 2	Otec3
			β_1	β_2	β_3
Období otelení	Letní	a_1	144	152	148
			152		
	Zimní	a_2		105	108
				158	
				118	

Místo pevného efektu věk při otelení analyzujeme náhodný efekt otce

Získáváme model se smíšenými efekty

$$y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + e_{ijk}$$

Na rozdíl od fixních efektů, u náhodných víme, že pocházejí z náhodného rozdělení s nulovým průměrem a známou variancí σ_β^2



Zobecněné nejmenší čtverce

$y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + e_{ijk}$... skalární zápis

$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{a} + \mathbf{e}$... maticový zápis

			Otec		
			Otec 1	Otec 2	Otec 3
			β_1	β_2	β_3
Období oteplení	Letní	a_1	144	152	148
			152		
	Zimní	a_2		105	108
				158	
				118	

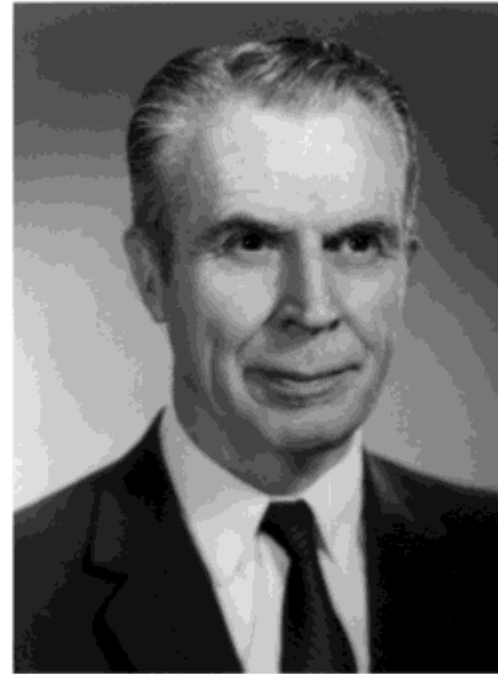
$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{231} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + a_1 + \beta_1 + e_{111} \\ \mu + a_1 + \beta_1 + e_{112} \\ \mu + a_1 + \beta_2 + e_{121} \\ \mu + a_1 + \beta_3 + e_{131} \\ \mu + a_2 + \beta_2 + e_{221} \\ \mu + a_2 + \beta_2 + e_{222} \\ \mu + a_2 + \beta_2 + e_{223} \\ \mu + a_2 + \beta_3 + e_{231} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{Z} \mathbf{a} + \mathbf{e}$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 152 \\ 152 \\ 148 \\ 105 \\ 158 \\ 118 \\ 108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{111} \\ e_{112} \\ e_{121} \\ e_{131} \\ e_{221} \\ e_{222} \\ e_{223} \\ e_{231} \end{bmatrix}$$

Příště:

BLUP



C.R. Henderson

